

## 目 录

第 1 章数学模型和数值方法引论	1
1.1 数学模型及其建立方法与步骤	1
1.1.1 数学模型	1
1.1.2 人口增长模型	1
1.1.3 建立数学模型的方法与步骤	4
1.2 数学模型举例	5
1.2.1 投入产出数学模型	5
1.2.2 两物种群体竞争系统	7
1.2.3 矿道中梯子问题	8
1.3 数值方法的研究对象	10
1.4 数值计算的误差	10
1.4.1 误差的来源与分类	10
1.4.2 误差与有效数字	11
1.4.3 求函数值和算术运算的误差估计	13
1.5 病态问题、数值稳定性与避免误差危害	14
1.5.1 病态问题与条件数	14
1.5.2 数值方法的稳定性	15
1.5.3 避免误差危害	17
1.6 线性代数的一些基础知识	19
1.6.1 矩阵的特征值问题、相似变换	19
1.6.2 线性空间和内积空间	21
1.6.3 范数、线性赋范空间	24
1.6.4 向量的范数和矩阵的范数	26
1.6.5 几种常见矩阵的性质	30
习题	35
第 2 章线性代数方程组的直接解法	39
2.1 引论	39
2.2 Gauss 消去法	40
2.2.1 顺序消去与回代过程	40
2.2.2 顺序消去能实现的条件	43
2.2.3 矩阵的三角分解	44
2.2.4 列主元素消去法	45

2.3 直接三角分解方法	48
2.3.1 Doolittle 分解方法	48
2.3.2 三对角方程组的追赶法	50
2.3.3 对称正定矩阵的 Cholesky 分解、平方根法	52
2.4 矩阵的条件数与病态方程组	57
2.4.1 扰动方程组、病态现象	57
2.4.2 矩阵的条件数与扰动方程组的误差分析	58
2.4.3 病态方程组的解法	61
习题	62
计算实习题	64

### 第 3 章线性代数方程组的迭代解法 66

3.1 迭代法的基本概念	66
3.1.1 引言	66
3.1.2 向量序列和矩阵序列的极限	68
3.1.3 迭代公式的构造	71
3.1.4 迭代法的收敛性分析	73
3.2 Jacobi 迭代法和 Gauss-Seidel 迭代法	76
3.2.1 Jacobi 迭代法	76
3.2.2 Gauss-Seidel 迭代法	76
3.2.3 J 法和 GS 法的收敛性	77
3.3 超松弛迭代法	79
3.3.1 逐次超松弛迭代公式	79
3.3.2 SOR 迭代法的收敛性	80
3.3.3 最优松弛因子	81
3.3.4 模型问题几种迭代法的比较	83
*3.4 共轭梯度法	84
3.4.1 与方程组等价的变分问题	84
3.4.2 最速下降法	85
3.4.3 共轭梯度法	86
习题	89
计算实习题	91

### 第 4 章非线性方程和方程组的数值解法 93

4.1 引言	93
4.2 二分法和试位法	96
4.2.1 二分法	96
4.2.2 试位法	97
4.3 不动点迭代法	98
4.3.1 不动点和不动点迭代法	98
4.3.2 不动点迭代法在区间 $[a, b]$ 的收敛性	100
4.3.3 局部收敛性	102
4.4 迭代加速收敛的方法	104
4.4.1 Aitken 加速方法	104
4.4.2 Steffensen 迭代方法	105
4.5 Newton 迭代法和割线法	106
4.5.1 Newton 迭代法的计算公式和收敛性	106
4.5.2 Newton 法的进一步讨论	107
*4.5.3 割线法	110
*4.6 非线性方程组的数值解法	111
4.6.1 非线性方程组	111
4.6.2 非线性方程组的不动点迭代法	112
4.6.3 非线性方程组的 Newton 迭代法	114
习题	115
计算实习题	116
*第 5 章矩阵特征值问题的计算方法	118
5.1 矩阵特征值问题的性质	118
5.1.1 矩阵特征值问题	118
5.1.2 特征值的估计和扰动	120
5.2 正交变换和矩阵分解	121
5.2.1 Householder 变换	121
5.2.2 Givens 变换	124
5.2.3 矩阵的 QR 分解和 Schur 分解	125
5.2.4 正交相似变换化矩阵为 Hessenberg 形式	129
5.3 幂迭代法和逆幂迭代法	133
5.3.1 幂迭代法	133
5.3.2 加速技巧	135

- 5.3.3 逆幂迭代法 135
- 5.4 QR 方法的基本原理 137
  - 5.4.1 基本的 QR 迭代算法 137
  - 5.4.2 Hessenberg 矩阵的 QR 方法 139
  - 5.4.3 带有原点位移的 QR 方法 140
- 5.5 对称矩阵特征值问题的计算 142
  - 5.5.1 对称矩阵特征值问题的性质 142
  - 5.5.2 Rayleigh 商的应用 143
  - 5.5.3 Jacobi 方法 144
- 习题 148
- 计算实习题 150

## 第 6 章插值法 151

- 6.1 Lagrange 插值 152
  - 6.1.1 Lagrange 插值多项式 152
  - 6.1.2 插值多项式的余项 156
- 6.2 均差与 Newton 插值多项式 161
  - 6.2.1 均差及其性质 161
  - 6.2.2 Newton 插值公式 163
  - \*6.2.3 差分及其性质 167
  - \*6.2.4 等距节点的 Newton 插值公式 168
- 6.3 Hermite 插值 170
  - 6.3.1 Hermite 插值多项式 171
  - 6.3.2 重节点均差 174
  - 6.3.3 Newton 形式的 Hermite 插值多项式 175
- 6.4 分段低次插值方法 178
  - 6.4.1 Runge 现象 178
  - 6.4.2 分段线性插值 179
  - 6.4.3 分段三次 Hermite 插值 180
- 6.5 三次样条插值函数 181
  - 6.5.1 三次样条插值函数 182
  - 6.5.2 三次样条插值函数的计算方法 183
  - 6.5.3 三次样条插值函数的误差 187
- 习题 188

计算实习题 189

## 第 7 章函数逼近 191

### 7.1 正交多项式 192

7.1.1 正交多项式的概念及性质 192

7.1.2 Legendre 多项式 194

7.1.3 Chebyshev 多项式 195

7.1.4 Chebyshev 多项式零点插值 196

7.1.5 Laguerre 多项式 199

7.1.6 Hermite 多项式 199

### \*7.2 最佳平方逼近 200

7.2.1 最佳平方逼近的概念及计算 200

7.2.2 用正交函数组作最佳平方逼近 203

7.2.3 用 Legendre 正交多项式作最佳平方逼近 205

### \*7.3 有理函数逼近 206

7.3.1 有理分式 207

7.3.2 Padé逼近 207

7.3.3 连分式 211

### 7.4 曲线拟合的最小二乘法 212

7.4.1 最小二乘法及其计算 212

7.4.2 线性化方法 216

7.4.3 用正交多项式作最小二乘曲线拟合 219

习题 222

计算实习题 223

## 第 8 章数值积分与数值微分 225

### 8.1 Newton Cotes 求积公式 226

8.1.1 梯形公式和 Simpson 公式 226

8.1.2 插值型求积公式 230

8.1.3 代数精度 231

8.1.4 Newton Cotes 求积公式 232

8.1.5 开型 Newton Cotes 求积公式 234

8.1.6 Newton Cotes 求积公式的数值稳定性 236

### 8.2 复合求积公式 237

- 8.2.1 复合梯形求积公式 237
- 8.2.2 复合 Simpson 求积公式 239
- 8.3 Romberg 求积公式 241
  - 8.3.1 外推技巧 241
  - 8.3.2 Romberg 求积公式 243
- \*8.4 自适应积分法 245
- 8.5 Gauss 型求积公式 247
  - 8.5.1 Gauss 型求积公式 249
  - 8.5.2 Gauss 型求积公式的稳定性与收敛性 254
  - 8.5.3 Gauss Legendre 求积公式 256
  - 8.5.4 Gauss Chebyshev 求积公式 259
  - \*8.5.5 Gauss Laguerre 求积公式 260
  - \*8.5.6 Gauss Hermite 求积公式 261
- \*8.6 数值微分 262
  - 8.6.1 Taylor 展开构造数值微分 263
  - 8.6.2 插值型求导公式 265
  - 8.6.3 数值微分的外推算法 268
  - 8.6.4 高阶数值微分 270
- 习题 273
- 计算实习题 275

## 第 9 章常微分方程初值问题的数值解法 276

- 9.1 引言 276
- 9.2 简单数值方法 278
  - 9.2.1 显式 Euler 方法 278
  - 9.2.2 隐式 Euler 方法 279
  - 9.2.3 梯形方法 280
  - 9.2.4 预估 校正方法 281
  - 9.2.5 单步方法的截断误差 283
- 9.3 Runge Kutta 方法 286
  - 9.3.1 用 Taylor 展开构造高阶数值方法 286
  - 9.3.2 Runge Kutta 方法 288
  - 9.3.3 高阶方法与隐式 Runge Kutta 方法 292
- 9.4 单步法的相容性、收敛性和绝对稳定性 294

9.4.1	相容性	294
9.4.2	收敛性	295
9.4.3	绝对稳定性	296
9.5	线性多步法	300
9.5.1	线性多步法的基本概念	300
9.5.2	Adams 方法	302
9.5.3	待定系数方法	306
9.5.4	预估 校正方法	307
*9.6	线性多步法的相容性、收敛性和绝对稳定性	310
9.6.1	相容性	310
9.6.2	收敛性	310
9.6.3	绝对稳定性	313
*9.7	误差控制与变步长	316
9.7.1	单步法	316
9.7.2	线性多步法	318
9.8	一阶方程组与刚性方程组	320
9.8.1	一阶方程组	320
9.8.2	高阶微分方程初值问题	324
9.8.3	刚性微分方程组	324
	习题	326
	计算实习题	327

## 附录 AMATLAB 简介 329

A.1	常数	329
A.2	矩阵	329
A.2.1	矩阵的形成	329
A.2.2	矩阵运算	331
A.2.3	数组运算	331
A.3	函数	332
A.3.1	内部函数	332
A.3.2	用户定义的函数	333
A.4	绘图	333
A.5	编程	335
	部分习题的答案或提示	337

